Tentamen Wiskunde 6, 29-6-1995, 9-12 uur

1.(a) [3] Gegeven een analytische functie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ waarbij $\mathrm{Re}\, f =: u$ en $\mathrm{Im}\, f =: v$ voldoen aan $u(x,y) = 2v(x,y)$. Bewijs dat er een constante $c \in \mathbf{R}$ bestaat zo, dat $f(z) = c(2+i)$. (Aanw.: Cauchy-Riemann.)

(b) [3] Gegeven een functie f waarvoor

$$f(z) = \frac{e^{1/z} + ez - 2e}{(z-1)^2} \text{ als } z \neq 0 \text{ en } z \neq 1.$$

Onderzoek de aard van de singulariteit van f in $z = 0$ en in $z = 1$.

(c) [3] Gegeven een gehele functie f waarvoor

$$|f(z)| \leq 1 + \sin|z|, \tag{1}$$

voor alle $z \in \mathbf{C}$ waarvoor $|z| \geq 2\pi$. Bewijs dat f identiek nul is.
Dezelfde vraag als (1) alleen geldt voor alle $z \in \mathbf{C}$ waarvoor $|z| \leq \frac{3}{2}\pi + \epsilon$ waarin ϵ een positieve constante is.

2. [9] Bewijs

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/3}}{(x^2+1)(x^2+64)} dx = \frac{\pi}{84\sqrt{3}}.$$

Hierin is $x^{1/3}$ positief als $x > 0$. Gebruik hierbij een contour in het boven halfvlak $\mathrm{Im}\, z \geq 0$. Geef de afleiding volledig inclusief de gebruikte afschattingen.

3. Gegeven de differentiaalvergelijking

$$w'' + \frac{\alpha z + 1}{z(z+1)} w' - \frac{\beta^2}{z^2(z+1)} w = 0. \tag{2}$$

(a) [2] Bewijs dat (2) reguliere singulariteiten bezit in $z = 0, -1$ en ∞.